EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES - PROBABILITÉS

Dénombrements

Exercice 1 - Dénombrer les anagrammes des mots suivants : MATHS, RIRE, ANANAS
(Rappel : anagramme est un mot ayant un sens ou non)

Exercice 2 - On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

1. si les livres doivent être groupés par matières.
2. si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

Exercice 3 - On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir :

1. sans imposer de contraintes sur les cartes.
2. contenant 5 carreaux ou 5 piques.
3. 2 carreaux et 3 piques.
4. au moins un roi.
5. au plus un roi.
6. 2 rois et 3 piques.

Exercice 4 - Une course oppose 20 concurrents.

1. Combien y-a-t-il de podiums possibles?
2. On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un livre (le même pour les 3 premiers). Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles?

Corrigé 1 - Un anagramme correspond à une permutation des lettres d'un mot. Mais si on permute deux lettres identiques, on trouve le même mot! On doit donc diviser le nombre total de permutations par le nombre de permutations entre lettres identiques. On trouve donc :

MATHS : $5!$
RIRE : $4!/2!$
ANANAS : $6!/(2!3!)$

Corrigé 2 - Il y a $3!$ façons de choisir l'ordre des matières. Une telle façon choisie, il y a $4!$ façons de ranger les livres de mathématiques, $6!$ façons de ranger les livres de physique, et $3!$ façons de ranger les livres de chimie. Le nombre de rangements possible est donc : $3!4!6!3!$.

2. Il peut y avoir 0,1,...,9 livres placés avant les livres de mathématiques. Il y a donc 10 choix du nombre de livres placés avant le livre de mathématiques. Ce choix fait, il y a 4! façons d'ordonner les livres de mathématiques, et 9! façons d'ordonner les autres : il y a donc en tout 10×4!9! rangements différents.

Exercice 3 – 1. Il n'y a pas d'ordre et pas de répétition sur les cartes : un tirage est donc une combinaison de 5 cartes parmi 32. Il y a : (5 parmi 32)= 201376 tirages différents.

2. Pour obtenir 5 carreaux, il faut choisir 5 cartes parmi 8 : il y a (5 parmi 8) tels tirages. De même pour obtenir 5 piques. Comme les deux cas sont disjoints, il y a 2×(5 parmi 8)=112 tels tirages différents.
3. Il y a (82) façons de choisir 2 carreaux parmi 8 puis, pour chacune de ces façons, il y a (3 parmi 8) façons de choisir 3 piques. Le nombre de tirages recherché est donc : (2 parmi 8) × (3 parmi 8)=1568.
4. On compte le complémentaire, c'est-à-dire les tirages sans rois : il faut alors choisir 5 cartes parmi 28, il y a (285) tels tirages. Le nombre de tirages recherché est donc : (5 parmi 32)−(5 parmi 28)=103096.
5. On a déjà compté les tirages sans roi. Pour les tirages comprenant un roi, il y a 4 façons de choisir le roi, puis, pour chacune de ces façons, (4 parmi 28) façons de choisir les autres cartes. On en déduit qu'il y a (5 parmi 28) + 4(4 parmi 28)= 180180 tels tirages.
6. On sépare les tirages contenant le roi de pique et ceux ne contenant pas le roi de pique.

- si le tirage ne contient pas le roi de pique, il y a (2 parmi 3) choix différents de 2 rois parmi 3, puis (3 parmi 7) choix de 3 piques parmi 7 (tous sauf le roi de pique).
- si le tirage contient le roi de pique, il reste 3 choix pour le roi différent du roi de pique, puis (2 parmi 7) choix pour les trois autres piques. Cela faisant, on n'a tiré que 4 cartes. Il reste une carte à choisir qui n'est ni un roi, ni un pique, et donc 32 −(4+7)=21 choix.

Finalement, le nombre de tirages possibles est :
3 × (2 parmi 7)× 21+(2 parmi 3)×(3 parmi 7)=1428.

Exercice 4 – 1. Pour le premier, on a 20 choix possibles, pour le second 19, pour le troisième 18. Le nombre de podiums possibles est donc égal à 20×19×18=6840.
2. L'ordre n'est plus important, et on cherche le nombre de choix de 3 concurrents parmi n, c'est-à-dire (3 parmi 20)=1140.

Probabilités simples & conditionnelles

Exercice 5

Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de boites de CD-ROM. 5% des boîtes sont abîmées. Le gérant estime que :

- 60% des boîtes abîmées contiennent au moins un CD-ROM défectueux.
- 98% des boïtes non abîmées ne contiennent aucun CD-ROM défectueux.

Un client achète une boite du lot. On désigne par A l'événement : "la boite est abimée" et par D l'événement "la boite achetée contient au moins une disquette défectueuse".

1. Donner les probabilités de $P(A)$, $P(\bar{A})$, $P_A(D)$, $P(D|\bar{A})$, $P(\bar{D}|A)$ et $P(\bar{D}|\bar{A})$.
2. Le client constate qu'un des CD-ROM acheté est défectueux. Quelle est a la probabilité pour qu'il ait acheté une boite abimée.

Exercice 6

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ?

Exercice 7

Une usine fabrique des pièces, avec une proportion de 0,05 de pièces défectueuses. Le contrôle des fabrications est tel que :

- si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 0,96.
- si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0,98.

On choisit une pièce au hasard et on la contrôle.Quelle est la probabilité

1. qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

Correction 5

Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de boites de CD-ROM. 5% des boîtes sont abîmées. Le gérant estime que :

- 60% des boîtes abîmées contiennent au moins un CD-ROM défectueux.
- 98% des boïtes non abîmées ne contiennent aucun CD-ROM défectueux.

Un client achète une boite du lot. On désigne par A l'événement : "la boite est abimée" et par D l'événement "la boite achetée contient au moins une disquette défectueuse".

1. Donner les probabilités de $P(A)$, $P(\bar{A})$, $P_A(D)$, $P(D|\bar{A})$, $P(\bar{D}|A)$ et $P(\bar{D}|\bar{A})$.
2. Le client constate qu'un des CD-ROM acheté est défectueux. Quelle est a la probabilité pour qu'il ait acheté une boite abimée.

Correction 6

Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de boites de CD-ROM. 5% des boîtes sont abîmées. Le gérant estime que :

- 60% des boîtes abîmées contiennent au moins un CD-ROM défectueux.
- 98% des boïtes non abîmées ne contiennent aucun CD-ROM défectueux.

Un client achète une boite du lot. On désigne par A l'événement : "la boite est abimée" et par D l'événement "la boite achetée contient au moins une disquette défectueuse".

1. Donner les probabilités de $P(A)$, $P(\bar{A})$, $P_A(D)$, $P(D|\bar{A})$, $P(\bar{D}|A)$ et $P(\bar{D}|\bar{A})$.
2. Le client constate qu'un des CD-ROM acheté est défectueux. Quelle est a la probabilité pour qu'il ait acheté une boite abimée.

Correction 7

1. On note A l'événement "la pièce est acceptée par le contrôle", et B l'événement "la pièce est bonne". L'événement E "Il y a une erreur au contrôle" se décompose en $A\cap\overline{B}$ et $\overline{A}\cap B$. Ces deux derniers événements sont incompatibles, on a donc :

$$P(E) = P(A\cap\overline{B}) + P(\overline{A}\cap B).$$

Maintenant, $P(A\cap\overline{B}) = P(A|\overline{B})P(\overline{B})$. Or, $P(\overline{B}) = 0,05$, et $P(A|\overline{B}) = 1-P(\overline{A}|\overline{B}) = 0,02$. De même, on a $P(\overline{A}\cap B) = P(\overline{A}|B)P(B)$ et on a $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B) = 0,04$. On obtient finalement :

$$P(E) = 0,95\times 0,04 + 0,05\times 0,02.$$

2. Dans cette question, on cherche $P(\overline{B}|A)$ alors que l'on connait les probabilités conditionnelles sachant B. Ceci nous invite à utiliser la formule de Bayes.

$$\begin{aligned} P(\overline{B}|A) &= \frac{P(\overline{B})P(A|\overline{B})}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})} \\ &= \frac{0,05\times 0,02}{0,95\times 0,96+0,05\times 0,02} = \frac{1}{913} \simeq 0,001. \end{aligned}$$