Théme 3

Exo 1

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -8 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

matrice $n \times p$
n b lignes, p nb colonnes

produit d'une matrice (1×4) par 1 matrice (4×3) ?

est-ce possible ? oui car $(1 \times 4) \times (4 \times 3) = (1 \times 3)$

les mêmes

resultat est matrice 1 ligne et 3 colonnes : $(\cdot \quad \cdot \quad \cdot)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -8 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

pour calculer la valeur en chaque point, on remarque que c'est l'intersection d'une ligne par 1 colonne. le résultat est le produit scalaire de la ligne et de la colonne en question ce qui donne $(-10 \quad 3 \quad 4)$

b) $(2 \times 3) \times (2 \times 3) \Rightarrow$ impossible.

pas les mêmes

c) $(2 \times 3) \times (3 \times 1) = (2 \times 1)$ 2 lignes, 1 colonne.

ok

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 2 + 8 \\ 2 - 3 + 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Exo 3

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.4 & 1 \\ -0.2 & 0.3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A × B ? $(2\times 3)\times(3\times 2) = (2\times 2)$

ok

$$AB = \begin{pmatrix} 0.6\times 3 - 0.4\times 2 & 0.6\times 4 - 0.4\times 6 \\ -0.2\times 3 + 0.3\times 2 & -0.2\times 4 + 0.3\times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$AB = ID \Rightarrow$ B est l'inverse à droite de A, A est l'inverse à gauche de B

B × A ? $(3\times 2)\times(2\times 3) = (3\times 3)$

ok

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.6 & -0.4 & 1 \\ -0.2 & 0.3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 0.6 + 4(-0.2) & 3\times(-0.4) + 4\times 0.3 & 3\times 1 + 4\times 2 \\ 2\times 0.6 + 6(-0.2) & 2\times(-0.4) + 6\times 0.3 & 2\times 1 + 6\times 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B\times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que $AB \neq BA$ - la taille $(n\times p)$ est d'ailleurs différente ! la première est (2×2), la deuxième (3×3)

C'est exceptionnel que le produit de 2 matrices commute

Exo 4

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases}$$

on réécrit sous forme matricielle en faisant très attention à aligner les x, les y et les z - c'est un piège à touristes classique

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} m+2 \\ 0 \\ m+2 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$\Delta \hat{=} \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1_+ & 1_- & 1-m_+ \\ 2+m & 0_+ & 3-m \\ 2+m & 0_- & 3+m-m^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 + m L_1 \end{matrix}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{dev}^t / 2^e \text{ colonne}}}{=} - \begin{vmatrix} 2+m & 3-m \\ 2+m & 3+m-m^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2+m & 3-m \\ 0 & 2m-m^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \end{matrix}$$

$$= (2+m)(2m-m^2) = (2+m)\,m\,(2-m) = m(m+2)(m-2)$$

$\Delta = 0 \iff m = 0$ ou $m = -2$ ou $m = +2$ (3 racines)

1^er^ cas, $\Delta \neq 0$ ie $m \neq 0$ et $m \neq -2$ et $m \neq 2$

alors le système admet une solution unique et d'après Cramer, on peut utiliser :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

où Δ_x, Δ_y et Δ_z sont les déterminants obtenus en remplaçant respectivement les colonnes x, y et z par B.

c'est à dire $\Delta_x = \begin{vmatrix} m+2 & 1 & 1-m \\ 0 & -1 & 2 \\ m+2 & -m & 3 \end{vmatrix} = (m+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -m & 3 \end{vmatrix}$

$$\Delta_x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dev}^t / 2^e \text{ ligne}}}{=} (m+2) \left\{ (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1-m \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} \right\}$$

$$= (m+2) \left[-(3-1+m) - 2(-m-1) \right] = (m+2)\,m$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{m(m+2)}{m(m+2)(m-2)} = \boxed{\frac{1}{m-2} = x}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & m+2 & 1-m \\ 1+m & 0 & 2 \\ 2 & m+2 & 3 \end{vmatrix} = (m+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y \underset{\text{dev}^t/2^e\text{ colonne}}{=} (m+2)\left[-\begin{vmatrix}1+m & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & 1-m\\ 1+m & 2\end{vmatrix}\right]$$

$$= (m+2)\left[-3(1+m)+4-2+(1+m)(1-m)\right]$$

$$= (m+2)(-1-3m+1-m^2) = -(m+2)\,m\,(m+3)$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{m(m+2)(m+3)}{m(m+2)(m-2)} = -\frac{m+3}{m-2} = \boxed{\frac{-m-3}{m-2} = y}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix}1 & 1 & m+2\\ 1+m & -1 & 0\\ 2 & -m & m+2\end{vmatrix} = (m+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1+m & -1 & 0\\ 2 & -m & 1\end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{dev}^t/3\text{ colonne}}{=} (m+2)\left(\begin{vmatrix}1+m & -1\\ 2 & -m\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1+m & -1\end{vmatrix}\right) = (m+2)\left[-m^2-m+2-1-1-m\right]$$

$$= (m+2)(-m^2-2m) = -m(m+2)(m+2)$$

$$z = -\frac{m(m+2)(m+2)}{m(m+2)(m-2)} = -\frac{m+2}{m-2} = \boxed{\frac{-m-2}{m-2} = z}$$

Bilan :

si $m \neq 0$ et $m \neq -2$ et $m \neq +2$,
le système admet une solution unique $\left(\overbrace{\frac{1}{m-2}}^{x} ; \overbrace{\frac{-m-3}{m-2}}^{y} ; \overbrace{\frac{-m-2}{m-2}}^{z}\right)$

Il reste à étudier les 3 cas particuliers : $m=0$, $m=-2$, $m=2$
pour lesquels on sait déjà qu'il n'existe pas de solution unique.
Peut-être pas de solution ou alors infinité de solution. Il faut
étudier cela individuellement (mais Cramer ne marche plus !!)

cas $m=0$: le système devient (on remplace m par 0)

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+2z=0 \\ 2x+3z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=2 & : L_1 \\ 2y-z=2 & : L_1-L_2 \\ -2y+z=2 & : L_3-2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2y-z=2 \\ 0=0 & L_3-L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2-z \\ y=1+z/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-z-1-z/2 \\ y=1+z/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - 3z/2 \\ y = 1 + z/2 \\ z = z \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>si m = 0</u>

On a une infinité de solutions qui représentent graphiquement une droite affine : de vecteur directeur $\begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et ordonnée origine $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$S = \{ (x, y, z) = (1 - 3z/2 \,;\, 1 + z/2 \,;\, z),\ z \in \mathbb{R} \}$$

<u>Cas m = -2</u> le système devient après substitution :

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 3z = 0 & L_1 \\ 5z = 0 & L_1 + L_2 \\ -3z = 0 & L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>si m = -2</u>

On a 1 infinité de solutions qui sont graphiquement la droite vectorielle (donc passe par l'origine) de vecteur directeur $(-1 ; 1 ; 0)$

$$S = \{ (x, y, z) = y(-1 ; 1 ; 0) \quad y \in \mathbb{R} \}$$

<u>Cas m = 2</u> le système devient :

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z = 4 & L_1 \\ -4y + 5z = -12 & L_2 - 3L_1 \\ -4y + 5y = -4 & L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

les 2 dernières équations sont incompatibles $\Rightarrow$ le système n'a pas de solution

<u>si m = 0</u>, $S = \emptyset$

Exercice 5

a) $M = \begin{pmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{pmatrix}$ M inversible ssi $\det M \neq 0$

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ -1 & a & x \\ -1 & -a & x \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & x \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$= a^2 \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ -2 & 1 & x \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}}_{C_1 - C_2} \underset{\text{dev}^t / 1^{e} \text{ col}}{=} a^2 (-)(-2) \begin{vmatrix} 1 & a \\ -1 & x \end{vmatrix} = 2a^2(x+a)$$

$\Rightarrow$ M inversible ssi $a \neq 0$ et $a \neq -x$.

autre façon de calculer :

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & 2a & a+x \\ 0 & 0 & a+x \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 + L_1 \\ L_3 + L_1 \end{matrix} = a(2a)(a+x) = 2a^2(a+x)$$

car déterminant diagonal supérieur !

b) méthode du pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & a & a & 1 & 0 & 0 \\ -a & a & x & 0 & 1 & 0 \\ -a & -a & x & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & a & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & a+x & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+x & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 + L_1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (a+x)/2a & 1/2a & 1/2a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/(a+x) & 0 & 1/(a+x) \end{array}\right) \begin{matrix} L_1 / a \\ L_2 / 2a \\ L_3 / (a+x) \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 - \frac{a+x}{2a} & \frac{1}{a} - \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2a} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a+x}{2a} & \frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+x} & 0 & \frac{1}{a+x} \end{array}\right) \begin{matrix} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{a-x}{2a} & \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2a} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a+x}{2a} & \frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+x} & 0 & \frac{1}{a+x} \end{array}\right)$$

(7)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2a} - \frac{a-x}{2a}\frac{1}{a+x} & -\frac{1}{2a} & -\frac{a-x}{2a}\frac{1}{a+x} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2a} - \frac{a+x}{2a}\frac{1}{a+x} & \frac{1}{2a} & -\frac{a+x}{2a}\frac{1}{a+x} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+x} & 0 & \frac{1}{a+x} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - \frac{a-x}{2a}L_3 \\ L_2 - \frac{a+x}{2a}L_1 \\ L_3. \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2a} & \frac{x-a}{2a(a+x)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+x} & 0 & \frac{1}{a+x} \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{2a} & \frac{x-a}{2a(a+x)} \\ 0 & \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2a} \\ \frac{1}{a+x} & 0 & \frac{1}{a+x} \end{pmatrix}}$$

Exo 8

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) A singulière : pas inversible
$\Leftrightarrow \det A = 0$

$$\det A \overset{\text{devt/1ère colonne}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-2+1) + (-1) = 0$$

donc $\boxed{A \text{ singulière}}$

b)
$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -\lambda & -\lambda & -1 \\ -\lambda & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}_{c_1+c_2+c_3} \overset{\text{factorisation/1ère colonne}}{=} -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}}_{\text{triangulaire supérieure}} \begin{matrix} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} = -\lambda(-\lambda-1)(-1-\lambda) = -\lambda(1+\lambda)^2$$

racines ? $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{ou} \\ 1+\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \end{cases}$

$$\boxed{\text{2 valeurs propres distinctes : } \begin{array}{ll} \lambda_1 = 0 & \text{valeur propre simple} \\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1 & \text{valeur propre double.} \end{array}}$$

c) A est diagonalisable ssi pour <u>toute</u> valeur propre, son degré de multiplicité correspond à la dimension de l'espace propre correspondant
pour λ_1, pas de pb, v.p est simple et on sait qu'alors espace propre est de dimension 1
pour λ_2, il faut étudier

<u>$\lambda = -1$</u> :

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; (A-\lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y-z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x+y-z=0 \Leftrightarrow x+y=z$ (on prend x et y comme paramètres)

9

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ vecteurs propres associés à $\lambda_2=\lambda_3=-1$: $\vec{v}_1 \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_{\lambda=-1} = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ qui est de dimension 2 comme la multiplicité de λ

$\underline{\lambda = 0}$

$$(A-\lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ x+y-2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = z \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z = z \end{cases}$$

$\Rightarrow$ vecteur propre $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_{\lambda=0} = \text{Vect}\{\vec{v}_3\}$ dimension 1 (on le savait avant de calculer)

$\Rightarrow$ $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det P \underset{\text{dévt / 1ère ligne}}{=} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

$$\text{Co}(P) = \begin{pmatrix} +(0) & -(-1) & +(-1) \\ -(-1) & +(0) & -(1) \\ +(-1) & -1 & +(1) \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

10

bilan :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vous pouvez vérifier en faisant les calculs, que :

$$P^{-1}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou que} \quad P.P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et que $A = PDP^{-1}$ (2 produits de matrices à faire)

c'est un bon exo, faites le pour le contrôle !

d) $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$ c'est du cours et je l'ai fait en TD

or $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$DP^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{n+1} & (-1)^n \\ (-1)^{n+1} & 0 & (-1)^n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & (-1)^{n+1} & (-1)^n \\ (-1)^{n+1} & 0 & (-1)^n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & (-1)^{n+1} & (-1)^n \\ (-1)^{n+1} & 0 & (-1)^n \\ (-1)^{n+1} & (-1)^{n+1} & 2(-1)^n \end{pmatrix}}$$

remarque : pour calculer PDP^{-1} j'ai fait $P(DP^{-1})$

mais j'aurai pu faire aussi $(PD)P^{-1}$

car la multiplication des matrices est associative

Exo 9

$f_\alpha(x,y,z) = (x+2y-2z,\ 2x+y+\alpha z,\ 2x+2y-3z)$

a) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^3$ $\quad f_\alpha : E \longrightarrow F$

toutes les composantes de f_α sont une combinaison linéaire de x, y et z

ie de la forme $ax+by+cz$.

$\Rightarrow$ f_α est une application linéaire.

b) $f_\alpha(x,y,z) = \vec{0}_F \iff \begin{cases} x+2y-2z=0 \\ 2x+y+\alpha z = 0 \\ 2x+2y-3z=0 \end{cases}$

$(S)\begin{cases} x+2y-2z=0 & : L_1 \\ -3y+(\alpha+4)z=0 & : L_2-2L_1 \\ -2y+z=0 & : L_3-2L_1 \iff y = z/2 \end{cases}$

$(S)\begin{cases} x+2y-2z=0 \\ -\frac{3}{2}z+(\alpha+4)z=0 \iff z\left(\alpha+4-\frac{3}{2}\right)=0 \iff z\left(\alpha+\frac{5}{2}\right)=0 \\ y = z/2 \end{cases}$

Si $\alpha+\frac{5}{2}=0$ $\left(\iff \alpha = -\frac{5}{2}\right)$ alors la 2e équation devient $0=0$

$(S) \iff \begin{cases} x+2y-2z=0 \\ y = z/2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z/2 \\ z = z \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Ker} f_{-5/2} = \left\{ z\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$

Si $\alpha \neq -5/2$, alors la 2e équation devient $z=0$

$(S) \iff \begin{cases} x+2y-2z=0 \\ z=0 \\ y = z/2 \end{cases} \iff x=y=z=0$

$\operatorname{Ker} f_\alpha = \{(0,0,0)\}$

Bilan :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \alpha = -5/2,\ \operatorname{Ker} f_\alpha = \{ z(1, 1/2, 1),\ z \in \mathbb{R} \} \\ \alpha \neq -5/2,\ \operatorname{Ker} f_\alpha = \{(0,0,0)\} \end{array}}$$

c) Théorème du rang

$\dim E = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \mathrm{rg}\, f$ — on sépare 2 cas

si $\alpha = -5/2$

$3 = 1 + \mathrm{rg}\, f \Rightarrow \mathrm{rg}\, f = 2 \neq \dim F = 3$

. $\mathrm{rg}\, f \neq \dim F \Rightarrow f$ pas surjective

. $\dim(\mathrm{Ker}\, f) \neq 0 \Rightarrow f$ pas injective

. f pas bijective

si $\alpha \neq -5/2$

$3 = 0 + \mathrm{rg}\, f \Rightarrow \mathrm{rg}\, f = 3$. or $\dim F = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

. $\mathrm{rg}\, f = \dim F \Rightarrow f$ surjective

. $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 0 \Rightarrow f$ injective

. f injective et surjective $\Rightarrow f$ bijective

d) Dans l'écriture de la matrice, pour ne pas se tromper, on s'assure que pour f, on a les x sous les x, les y sous les y, les z sous les z. Sinon erreur (et tout le reste exo est faux, donc mauvaise note)

$$f_\alpha(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + 2y - 2z \\ 2x + y + \alpha z \\ 2x + 2y - 3z \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & \alpha \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}}$$

2 cas

si $\alpha = -5/2$

f pas bijective $\Leftrightarrow M(f)$ pas inversible

si $\alpha \neq -5/2$ — f bijective $\Leftrightarrow M(f)$ est inversible

ici, puisque $\alpha = 2$, f bijective donc $M(f)$ inversible

e)
$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & -2 \\ \underbrace{1-\lambda}_{c_1+c_2+c_3} & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}}_{\text{diagonale supérieure}}$$

factorisat° 1ère colonne

$$= (1-\lambda)(-1-\lambda)(-1-\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda)(1+\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda)^2$$

$$\boxed{2 \text{ valeurs propres : } \underbrace{\lambda_1 = 1}_{\text{simple}} \; ; \; \underbrace{\lambda_2 = \lambda_3 = -1}_{\text{double}}}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow Tr(M) = 1 + 1 - 3 = -1$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

dévt / 1ère ligne

$$= (-3+4) - 2(-6+4) - 2(4-2) = 1 - 2(-2) - 2(2) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\det(M) = 1 \; ; \; Tr(M) = -1}$$

or $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 - 1 - 1 = -1$ donc on a bien $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = Tr(M)$

or

$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \times (-1) \times (-1) = 1$ donc on a bien $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det(M)$

on a fait les vérifications demandées
les 2 tests sont corrects

g) A ce stade on n'a aucun moyen de savoir si la matrice est diagonalisable (je rappelle que cela n'a rien à voir avec le fait que la matrice soit inversible !)

On a une valeur propre double, il faut regarder la dimension du sous espace associé à cette valeur propre.

<u>Sous espace : $\lambda = -1$</u>

$$(M - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \iff x + y - z = 0$$

$$\iff x + y = z \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x + y \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{2 vecteurs propres = multiplicité de la valeur propre} \Rightarrow \text{matrice est diagonalisable}}$

(la valeur propre $\lambda = +1$ ne pose pas de problème car elle est simple)

$$\boxed{E_{\lambda=-1} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$$ espace propre associé à valeur propre -1

<u>Sous espace $\lambda = +1$:</u>

$$(M - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2y - 2z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = z \\ x = z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z = z \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{E_{\lambda=1} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$$

g) Puisque M est diagonalisable, on a $M = PDP^{-1}$

avec $D = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}}_{\text{on a rangé les valeurs propres dans l'ordre croissant}}$ $\qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rq: on aurait pu aussi prendre $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ car les premières colonnes correspondent à la valeur propre -1.
On aura alors P^{-1} différent de ce que je vais calculer mais c'est aussi bon : on aura toujours $M = PDP^{-1}$

$\underline{P^{-1}}$? on va utiliser pour une fois le pivot de Gauss (pour changer) au lieu de $\frac{1}{\det P} {}^t Co(P)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - L_2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 + L_3 \\ L_1 + L_3 \\ -L_3 \end{array}$$

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} ; \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

h) $M = PDP^{-1}$; $M^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD\underbrace{(P^{-1}P)}_{Id}DP^{-1} = PD^2P^{-1}$

$M^3 = M^2 M = PD^2(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^3P^{-1}$

et par récurrence, on a $\boxed{M^n = PD^nP^{-1}}$

Cette démo rapide est à <u>savoir</u>

<u>ici</u> :
$$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P D^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{n+1} & (-1)^n \\ (-1)^{n+1} & 0 & (-1)^n \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P D^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & (-1)^{n+1}+1 & (-1)^n - 1 \\ (-1)^{n+1}+1 & 1 & (-1)^n - 1 \\ (-1)^{n+1}+1 & (-1)^{n+1}+1 & 2(-1)^n - 1 \end{pmatrix} = M^n}$$

h) $f^{46}(2,1,2) = M^{46}(2,1,2)$ 46 est pair, donc $(-1)^{n+1} = -1$; $(-1)^n = +1$

donc $$M^{46}(2,1,2) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{matrice identité}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{46}(2,1,2) = (2,1,2)}$$

i) $$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n - 2z_n \\ y_{n+1} = 2x_n + y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = 2x_n + 2y_n - 3z_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

j'ai écrit sous forme matricielle (voir d)).

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$ et oui, c'est bien la matrice M !

cette équation nous donne la valeur du triplet $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ en fonction du triplet précédent (x_n, y_n, z_n)

et cette équation est vraie pour tout n.

je peux donc écrire le rang n, en fonction du rang $n-1$ (le précédent)

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et pareil} \quad \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \\ z_{n-2} \end{pmatrix} \quad \text{cf.}$$

on fait -1 — cf — on fait -1

donc
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = M \left(M \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \right) = M^2 \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = M^2 \left(M \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \\ z_{n-2} \end{pmatrix} \right)$$

$$= M^3 \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \\ z_{n-2} \end{pmatrix}$$

par récurrence on a donc
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = M^{4} \begin{pmatrix} x_{n-3} \\ y_{n-3} \\ z_{n-3} \end{pmatrix} = M^{5} \begin{pmatrix} x_{n-4} \\ y_{n-4} \\ z_{n-4} \end{pmatrix}$$

-1 $\quad$ -1

etc.

au final, quand on fait n fois ça, on a

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = M^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad \text{car } 0 = n-n$$

ou encore (changement indice)
$$\boxed{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-1)^{n+1}+1 & (-1)^n-1 \\ (-1)^{n+1}+1 & 1 & (-1)^n-1 \\ (-1)^{n+1}+1 & (-1)^{n+1}+1 & 2(-1)^n-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ (-1)^{n+1}+(-1)^n \\ (-1)^{n+1}+2(-1)^n \end{pmatrix}$$

or comme $(-1)^{n+1}+(-1)^n = 0$, on a $\boxed{(x_n, y_n, z_n) = ((-1)^n, 0, (-1)^n)}$

Pour le faire proprement

il faut faire une vraie démonstration par récurrence.

on a $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ et ceci est vrai pour tout n.

en particulier : $\underline{n=0}$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = M^1 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

$\underline{n=1}$: $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et comme , on a $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = M M \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

$= M^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

on a donc l'impression que $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

. or on a vu que c'était vrai au rang 0 (voir $n=0$)

. hyp de récurrence, c'est vrai au rang n : $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

montrons alors que c'est vrai au rang $n+1$

or on sait que $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ (voir formule haut de feuille)

et d'après hypothèse récurrence, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

on remplace : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = M M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = M^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

on a donc fini la démonstration par récurrence.

$$\Rightarrow \boxed{\forall n, \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}}$$